Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 5, pp. 317–327. Pergamon Press 1962. Printed in Great Britain.

VEREINFACHTE BERECHNUNG DER WÄRMEÜBERTRAGUNG DURCH STRAHLUNG VON EINEM GAS AN EINE WAND

H. HAUSEN und J. A. BINDER

Technische Hochschule, Welfengarten 1a, Hannover, Germany

(*Received* 18 *November* 1961)

Zusammenfassung—Nachdem Binder die in Wärmeaustauschern auftretende Wärmestrahlung unter gewissen Voraussetzungen exakt berechnet hat, werden nachstehend Näherungsverfahren abgeleitet, bei denen die Wärmestrahlung nur an einzelnen Stellen genau berechnet und hieraus auf einen guten Mittelwert der Wärmeübergangszahl α_s durch Strahlung geschlossen wird. In vielen Fällen genügt schon die Berechnung an einer einzigen Stelle, die dadurch bestimmt ist, dass hier die Gastemperatur etwa um ein Drittel der gesamten Temperatursenkung des Gases höher liegt als seine Austrittstemperatur. Eine praktisch stets ausreichende Genauigkeit erreicht man bei genauer Berechnung an zwei Stellen, wobei auch die Temperaturabhängigkeit des Strahlungsaustauschverhältnisses berücksichtigt werden kann.

BENUTZTE BEZEICHNUNGEN

a, konstanter oder veränderlicher Faktor in Gl. (11);

c_p, spezifische Wärme bei konstantem Druck;

C_s, Strahlungszahl des schwarzen Körpers;

F, wärmeübertragende Fläche;

G, in der Zeiteinheit strömende Gasmenge;

Q, in der Zeiteinheit übertragene Wärmemenge;

Q_s, in der Zeiteinheit durch Strahlung übergegende Wärmemenge;

T, Gastemperatur;

T_1, T_2, Ein- und Austrittstemperatur des Gases;

T_w, Wandtemperatur;

$\Delta T = T - T_w$, Temperaturunterschied zwischen Gas und Wand;

x, y, Veränderliche in einer beliebigen Funktionen $y = f(x)$;

α, Gesamtwärmeübergangszahl;

α_k, auf Leitung und Konvektion beruhende Wärmeübergangszahl;

α_s, Auf Strahlung beruhende Wärmeübergangszahl;

ϵ_{gw}, Strahlungsaustauschverhältnis von Gas und Wand.

Indices

m, Mittelwert;

Ein Stern (*), kennzeichnet die Temperaturen, bei denen die Wärmeübertragung durch Strahlung exakt berechnet wird, und die exakt berechneten Werte selbst.

WIRD bei höheren Temperaturen, wie sie z.B. in den Rohrsystemen von Dampfkesseln auftreten, Wärme von einem Gas an die Rohrwandungen übertragen, so beruht meist ein erheblicher Teil dieser Wärmeübertragung auf Strahlung. Bringt man diesen Anteil durch eine entsprechende Wärmeübergangszahl α_s zum Ausdruck, so ist diese Übergangszahl im Gegensatz zum Wärmeübergang durch Berührung mit der Temperatur stark veränderlich, entsprechend der Tatsache, dass die Strahlung einer schwarzen Fläche genau, die anderer Flächen oder eines Gases angenähert der 4. Potenz der absoluten Temperatur proportional ist.

Die starke Veränderlichkeit von α_s hat man bisher vielfach nur dadurch berücksichtigt, dass man für den arithmetischen Mittelwert der Gastemperatur und der Rohrwandtemperatur die auf Strahlung beruhende Wärmeübergangszahl α_s ermittelte und mit diesem nunmehr als konstant betrachteten Wert von α_s die weitere

Berechnung durchführte. Da aber dieses Verfahren sehr ungenau ist, hat Binder in seiner Dissertation [1] eine exakte Berechnung der Wärmeübertragung unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit von α_s durchgeführt und zwar unter der Voraussetzung, dass die Wärmestrahlung genau der 4. Potenz der absoluten Temperatur proportional ist. Die erhaltenen verwickelten Beziehungen hat Binder mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine zahlenmässig ausgewertet. Das Ergebnis hat er in Diagrammen dargestellt.

Die Praxis wünscht jedoch einfachere Berechnungsverfahren, selbst wenn solche Verfahren nicht dieselbe Genauigkeit erzielen lassen wie eine exakte Berechnung. Aus diesem Grunde hat sich der erste Verfasser Hausen bemüht, einfachere Berechnungsverfahren zu finden. Der zweite Verfasser Binder hat die Genauigkeit der vorgeschlagenen Näherungsverfahren mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine geprüft. Die grundlegenden Überlegungen und die Ergebnisse dieser Untersuchung, die für die praktische Durchführung von Wärmeübergangsberechnungen wertvoll sein dürften, sollen nachstehend erörtert werden.

GENAUES BERECHNUNGSVERFAHREN VON BINDER

Binder [1] hat exakt die drei Fälle behandelt, in denen (1) nur durch Konvektion, d.h. genauer durch Wärmeleitung und Konvektion, (2) nur durch Strahlung und (3) durch Konvektion und Strahlung Wärme übertragen wird. Für die Prüfung der nachstehend erörterten Näherungsverfahren interessiert am meisten der Fall der reinen Wärmestrahlung, weil hierbei die Wärmeübergangszahl am stärksten von der Temperatur abhängt. Sieht man überdies vom Gleichstrom ab, der nur selten und in kleinen Temperaturbereichen benutzt wird, so liegen die ungünstigsten Verhältnisse dann vor, wenn die Rohrwandtemperatur konstant ist, was angenähert im Verdampfungsteil von Dampfkesseln zutrifft. Daher soll im folgenden, soweit nichts anderes gesagt ist, stets konstante Wandtemperatur vorausgesetzt werden. Weiterhin werde die meist nur geringe Temperaturabhängigkeit des Strahlungsaustauschverhältnisses ϵ_{gw} von Gas und Wand vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die Wärmeübertragung durch Strahlung wie folgt berechnen, wobei man nach Binder zu einem geschlossenen, wenn auch ziemlich verwickelten Ausdruck gelangt. Die Ableitung von Binder werde kurz wiederholt, weil auf die Ergebnisse seiner Rechnungen wiederholt zurückgegriffen werden muss.

Während im allgemeinen die Gesamtwärmeübergangszahl α_g sich aus dem konvektiven Anteil α_k und dem Strahlungsanteil α_s zusammensetzt, ist bei reiner Strahlung $\alpha_g = \alpha_s$. Berücksichtigt man dies, dann wird von einem Gas der Temperatur T an ein Flächenelement dF der Wand von der Temperatur T_w in der Zeiteinheit durch Strahlung die Wärmemenge

$$\mathrm{d}Q_s = C_s\epsilon_{gw}(T^4 - T_w^4)\,\mathrm{d}F = \alpha_s(T - T_w)\,\mathrm{d}F \quad (1)$$

übertragen, wobei C_s die Strahlungszahl des vollkommen schwarzen Körpers und ϵ_{gw} das genannte Strahlungsaustauschverhältnis von Gas und Wand bedeutet. Nimmt durch diese Wärmeübertragung die Temperatur des Gases um dT ab und ist G die in der Zeiteinheit an der Wand vorbeiströmende Menge und c_p die spezifische Wärme des Gases, dann ist auch

$$\mathrm{d}Q_s = -Gc_p\,\mathrm{d}T. \quad (2)$$

Ist ferner F die gesamte von der Strahlung getroffene Oberfläche der Wand, T_1 die Anfangstemperatur und T_2 die Endtemperatur des Gases, dann gilt entsprechend für die gesamte in der Zeiteinheit übergehende Wärmemenge

$$Q_s = Gc_p(T_1 - T_2). \quad (3)$$

Andererseits folgt unter Bildung geeigneter Mittelwerte aus Gl. (1):

$$Q_s = C_s\epsilon_{gw}F(T^4 - T_w^4)_m = \alpha_{sm}F(T - T_w)_m, \quad (4)$$

wobei α_{sm} den gesuchten Mittelwert von α_s darstellen und T_w ebenso wie ϵ_{gw} nach Voraussetzung als konstant betrachtet werden soll. Unter $(T - T_w)_m$ werde wie üblich der logarithmische Mittelwert von $T_1 - T_w$ und $T_2 - T_w$ verstanden, der bekanntlich an die Bedingung geknüpft ist, dass wie schon in Gl. (3) angenommen, c_p nicht von der Temperatur abhängt.

Aus Gl. (4) folgt

$$\alpha_{sm} = C_s \epsilon_{gw} \frac{(T^4 - T_w^4)_m}{(T - T_w)_m}. \tag{5}$$

Die mittlere Wärmeübergangszahl α_{sm} ist hiernach in erster Linie durch den Mittelwert $(T^4 - T_w^4)_m$ bestimmt. Dieser Mittelwert lässt sich durch folgende Betrachtung ermitteln.

Durch Gleichsetzen von Gl. (1) und (2) ergibt sich

$$-\frac{dT}{T^4 - T_w^4} = \frac{C_s \epsilon_{gw}}{G c_p} \cdot dF$$

und durch Integration

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T^4 - T_w^4} = \frac{C_s \epsilon_{gw}}{G c_p} F. \tag{6}$$

Für das Integral erhält man durch Partialbruchzerlegung

$$\left.\begin{aligned} &\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T^4 - T_w^4} = \frac{1}{2T_w^3}\,, \\ &\left[\int_{T_2}^{T_1} \frac{d(T/T_w)}{(T/T_w)^2 - 1} - \int_{T_2}^{T_1} \frac{d\,(T/T_w)}{(T/T_w)^2 + 1}\right] \\ &= \frac{1}{2T_w^3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(T_1 - T_w)(T_2 + T_w)}{(T_1 + T_w)(T_2 - T_w)} \right. \\ &\left. - \operatorname{arctg}\frac{T_1}{T_w} + \operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_w}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Formt man schliesslich die rechte Seite von Gl. (6) mit Hilfe der Gl. (3) und (4) um, dann folgt für den gesuchten Mittelwert

$$(T^4 - T_w^4)_m = \frac{T_1 - T_2}{\int_2^1 [dT/(T^4 - T_w^4)]}. \tag{8}$$

und nach Gl. (5), wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{T_1 - T_2}{(T - T_w)_m} = \ln\frac{T_1 - T_w}{T_2 - T_w^4}$$

ist,

$$\alpha_{sm} = \frac{C_s \epsilon_{gw}}{\int_2^1 [dT/(T^4 - T_w^4)]} \cdot \ln\frac{T_1 - T_w}{T_2 - T_w}. \tag{9}$$

Hiermit ist nach Binder [1] sowohl der Mittelwert $(T^4 - T_w^4)_m$ wie auch α_{sm} bestimmt, weil das Integral nach Gl. (7) berechnet werden kann.

Das Ergebnis der nach den Gl. (7) und (8) exakt durchgeführten Berechnung von $(T^4 - T_w^4)_m$ ist in Abb. 1 dargestellt. In dieser Abb. ist $(T^4 - T_w^4)_m/T_w^4$ abhängig von T_1/T_w für verschiedene Werte des Parameters T_2/T_w aufgetragen.

Binder [1] hat auch den Fall behandelt, dass bei konstanter Wandtemperatur Strahlung und Konvektion gemeinsam an der Wärmeübertragung beteiligt sind. Das hierbei auftretende Integral hat er unter verschiedenen Annahmen nach einem sehr genauen Näherungsverfahren numerisch ausgewertet. Die Ergebnisse auch dieser Rechnung sollen später zur Beurteilung der Genauigkeit der vereinfachten Verfahren mit herangezogen werden.

VORSCHLÄGE ZUR VEREINFACHUNG DER BERECHNUNG

Die Berechnung des für die Strahlung massgebenden Mittelwertes $(T^4 - T_w^4)_m$ lässt sich zwar nach den Gl. (7) und (8) durchführen und durch Benutzung von Abb. 1 erleichtern. Trotzdem erscheint es, wie schon einleitend hervorgehoben, für praktische Berechnungen erwünscht, über ein einfacheres Verfahren zu verfügen, das weder eine so verwickelte Beziehung wie Gl. (7) noch ein besonderes Diagramm benötigt. Dabei genügt eine relativ bescheidene Genauigkeit. Denn das Strahlungsaustauschverhältnis ϵ_{gw} ist selbst wegen der streuenden Versuchswerte mit einer Ungenauigkeit bis zu etwa 10 Prozent behaftet. Ausserdem ist α_{sm} wegen der stets sich überlagernden Wärmeübertragung durch Konvektion nur ein Teil der Gesamtwärmeübergangszahl α_g, so dass sich eine. Ungenauigkeit von α_{sm} nur in verringertem Masse auf die Genauigkeit von α_g auswirkt. Vor allem aber soll auch erstrebt werden, dass das Näherungsverfahren möglichst allgemein, insbesondere auch bei Überlagerung von Konvektion und Strahlung und bei veränderlicher Wandtemperatur gilt.

Der Grundgedanke der zu besprechenden Näherungsverfahren besteht darin, $T^4 - T_w^4$ nur an einer, an zwei oder an drei Stellen des Wärmeaustauschers zu berechnen und daraus nach einer einfachen Regel auf den Mittelwert $(T^4 - T_w^4)_m$ zu schliessen. Das Verfahren ist

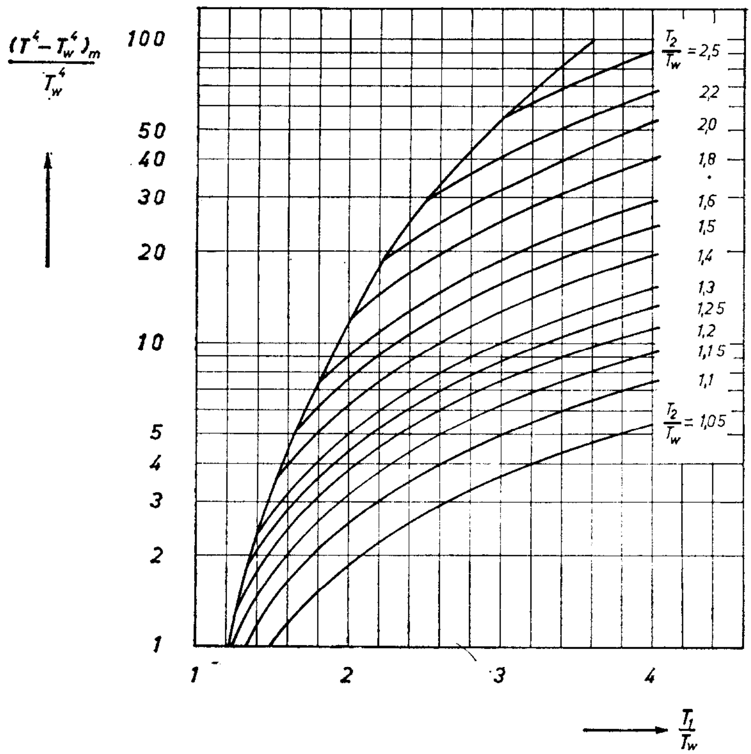

ABB. 1. Für reine Wärmestrahlung massgebender Mittelwert $(T^4 - T_w^4)_m/T_w^4$ nach genauer Berechnung von Binder

T, Gastemperatur; T_2, Endtemperatur;
T_1, Anfangstemperatur; T_w, Konstant angenommene Wandtemperatur.

umso einfacher, an je weniger Stellen $T^4 - T_w^4$ genau berechnet werden muss; andererseits ist aber zu erwarten, dass im allgemeinen die Genauigkeit des sich ergebenden Mittelwertes mit der Zahl dieser Stellen zunimmt.

EINFACHSTES VERFAHREN MIT GENAUER BERECHNUNG DER STRAHLUNG AN NUR EINER STELLE

Zwischen den Ein- und Austrittstemperaturen T_1 und T_2 des Gases werde eine einzige Temperatur T^* so gewählt, dass die für diese Temperatur berechnete Strahlung als guter Mittelwert für den gesamten Wärmeaustauscher angesehen werden kann. Ist wieder $(T^4 - T_w^4)_m$ der nach Binder für T_w = const und ϵ_{gw} = const mit Hilfe der Gl. (7) und (8) genau bestimmte Mittelwert von $T^4 - T_w^4$, so soll also mit ausreichender Genauigkeit

$$T^{*4} - T_w^4 = (T^4 - T_w^4)_m$$

oder auch

$$\left(\frac{T^*}{T_w}\right)^4 = 1 + \frac{(T^4 - T_w^4)_m}{T_w^4} \tag{10}$$

sein. Da $(T^4 - T_w^4)_m/T_w^4$ für jedes Wertepaar von T_1/T_w und T_2/T_w durch die genannten Gleichungen festgelegt ist oder aus Abb. 1 entnommen werden kann, kann man für jedes solches Wertepaar nach Gl. (10) sofort auch den Wert von $(T^*/T_w)^4$ und damit auch T^* ermitteln.

Für die praktische Anwendung kann indessen diese Überlegung nur bedeutsam sein, wenn es gelingt, T^* ohne Benutzung der Gl. (7) und (8) oder von Abb. 1 nach einer einfachen Regel festzulegen. Als erste Näherung kann man

$$T^* = T_2 + a(T_1 - T_2) \tag{11}$$

setzen, wobei man a als Konstante betachtet. Es zeigt sich, dass man im Mittel zu einer brauchbaren Darstellung von T^* gelangt, wenn man $a = \frac{1}{3}$ oder $a = 0{,}36$ setzt.

Welche Genauigkeit mit diesen Werten von a und den hiermit nach Gl. (11) bestimmten Werten von T^* erreicht werden kann, geht aus Abb. 2 hervor. In diesem Abb. ist die prozentuale Abweichung von $T^{*4} - T_w^4$ gegenüber dem genau berechneten Mittelwert $(T^4 - T_w^4)_m$ abhängig von T_1/T_2 aufgetragen. Für $a = \frac{1}{3}$ ergibt sich ein

Falls die mit einem konstant angenommenen Wert von a erreichbare Genauigkeit genügt, ist somit ein sehr einfacher Weg zur Berechnung der Wärmeübertragung durch Strahlung gefunden. Denn mit dem nach Gl. (11) ermittelten Wert von T^* kann man die Wärmestrahlung so berechnen, als hätte das Gas durchweg die Temperatur T^*. Die gesamte übertragene Wärmemenge erhält man schliesslich, indem man die durch Konvektion übertragene Wärmemenge hinzuaddiert.

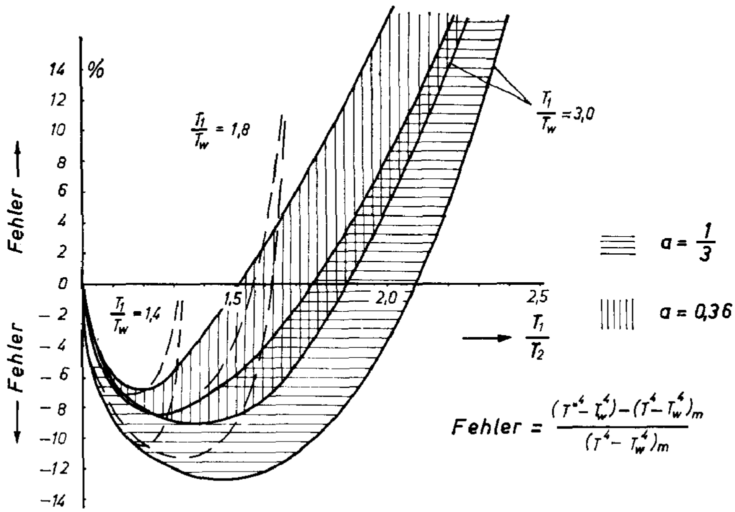

Abb. 2. Fehler des einfachen Verfahrens mit a = const in Gleichung (11) bei reiner Wärmestrahlung.

Streubereich der Fehler, der durch waagerechte Schraffur, für $a = 0{,}36$ ein etwas höher liegender Streubereich, der durch senkrechte Schraffur gekennzeichnet ist. Hierbei ist angenommen, dass T_2/T_w nicht kleiner als 1,05 ist. Diesem Wert von T_2/T_w entspricht jeweils die Kurve, die den Streubereich nach oben begrenzt. Als dünne gestrichelte Linien sind ferner Kurven für konstante Werte von T_1/T_w eingezeichnet. Ihre Hüllkurve stellt jeweils die untere Begrenzungslinie des Streubereiches dar.

Berücksichtigt man, dass T_1/T_2 praktisch meist wesentlich kleiner als 2 ist, dann erkennt man, dass der Wert $a = 0{,}36$ etwas günstiger ist als der Wert $\frac{1}{3}$ und dass man grösste Abweichungen von etwa 10 Prozent erwarten muss.

Wenn man den Wärmedurchgang durch die Wand berechnen will, wozu man die Kenntnis der Wärmedurchgangszahl k benötigt, kann man wie folgt vor gehen. Nach Ermittlung von T^* nach Gl. (11) berechnet man zunächst die Wärmeübergangszahl α_{sm}. Zu diesem Zweck setzt man anstelle von Gl. (5)

$$\alpha_{sm} = C_s \epsilon_{gw} \frac{T^{*4} - T_w^4}{(T - T_w)_m}, \tag{12}$$

worin $(T - T_w)_m$ wieder den logarithmischen Mittelwert der Temperaturdifferenz bedeuten soll. Durch Gl. (12) ist α_{sm} bestimmt, da ϵ_{gw} nach den Gesetzen der Gasstrahlung in bekannter Weise ermittelt werden kann. Hiermit ist auch die Gesamtwärmeübergangszahl $\alpha_g = \alpha_k + \alpha_s$ sowie nach ebenfalls bekannten Berechnungsverfahren die Wärmedurchgangszahl k festgelegt. Hängt ϵ_{gw} von der Temperatur ab, dann muss man in Gl. (12) u.U. T^{*4} und T_w^4 mit etwas verschiedenen Werten von ϵ_{gw} multiplizieren.

Wenn man danach fragt, wie sich die in Abb. 2 für reine Strahlung dargestellten Fehler auf die Gesamtwärmeübergangszahl $\alpha_g = \alpha_k + \alpha_s$ auswirken, könnte man vermuten, dass die Fehler rend die beiden anderen Streubereiche die Fehler bei gleichzeitiger Wärmeübertragung durch Konvektion und Strahlung wiedergeben. Als Mass für das Verhältnis α_k/α_s ist hierbei zur Vereinfachung der Rechnung der Ausdruck $\alpha_k/4C_s\epsilon_{gw}T_w^3$ gewählt. Dieser Ausdruck ist stets etwas grösser als α_k/α_s, weil α_s angenähert durch die Beziehung

$$\alpha_s = 4C_s\epsilon_{gw}\left(\frac{T^* + T_w}{2}\right)^3$$

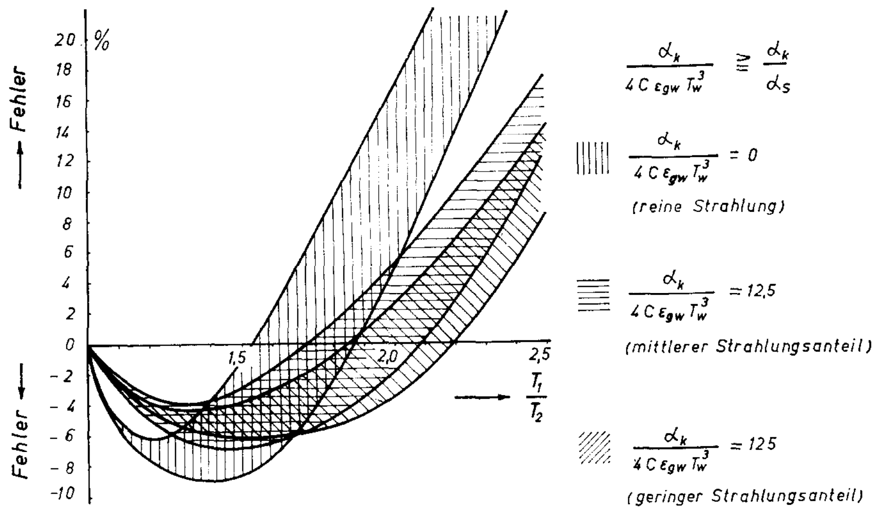

ABB. 3. Einfluss der konvektiven Wärmeübergangszahl α_k auf die Genauigkeit des einfachen Verfahrens mit $a = 0,36$. ($C = C_s$ = Strahlungszahl des schwarzen Körpers.)

sich im Verhältnis α_s/α_g reduzieren. Dies wäre richtig, wenn bei gleichzeitiger Konvektion und Strahlung die Temperatur des Gases längs des Wärmeaustauschers genau so verliefe wie bei reiner Wärmestrahlung. Da aber das Hinzutreten der Konvektion den Temperaturverlauf beeinflusst, treten zusätzliche Ungenauigkeiten in der Berechnung auf, die die erwartete Abnahme der Fehler zum Teil aufheben. Die Fehler, die sich bei Berücksichtigung des geänderten Temperaturverlaufs bei Anwendung des einfachen Verfahrens mit $a = 0,36$ ergeben, sind nach Vergleich mit den von Binder genau berechneten Werten in Abb. 3 dargestellt. Durch senkrechte Schraffur sind wie in Abb. 2 wieder die Fehler bei reiner Wärmestrahlung gekennzeichnet, während wiedergegeben werden kann. Die Fehler bei $\alpha_k/4C_s\epsilon_{gw}T_w^3 = 12,5$ sind durch waagerechte Schraffur, bei $\alpha_k/4C_s\epsilon_{gw}T_w^3 = 125$ durch schräge Schraffur gekennzeichnet. Die Fehler werden hiernach durch das Hinzutreten der Konvektion kleiner, wenn auch nur in verhältnismässig geringem Masse.

Das beschriebene Verfahren lässt sich zur Berechnung der Gasstrahlung auch anwenden, wenn die Wandtemperatur T_w nicht konstant ist, sondern sich von der Stelle des Gaseintritts bis zur Stelle des Gasaustritts von T_{w1} bis T_{w2} ändert. Neben T^* ist dann an derselben Stelle des Wärmeaustauschers auch ein entsprechender Wert T_w^* der Wandtemperatur festzulegen. Setzt man konstante specifische Wärme des Gases voraus, und nimmt man weiterhin an, dass die Temperatur der Wand sich ebenso ändert, wie wenn sie ein zweites strömendes Medium mit konstanter spezifischer Wärme wäre, dann folgt aus einer Wärmemengenbilanz

$$\frac{T_{w1} - T_w^*}{T_{w1} - T_{w2}} = \frac{T_1 - T^*}{T_1 - T_2}$$

und hieraus mit T^* nach Gl. (11):

$$T_w^* = T_{w2} + a(T_{w1} - T_{w2}). \qquad (13)$$

Hiernach kann T_w in derselben Weise aus T_{w1} und T_{w2} bestimmt werden wie T^* aus T_1 und T_2. Bei temperaturabhängigen spezifischen Wärmen und anderem Verlauf der Wandtemperatur könnte man an eine genauere Berechnung von T_w^* denken. Doch dürfte sich diese in Rücksicht auf die beschränkte Genauigkeit des geschilderten Berechnungsverfahrens vielfach kaum lohnen.

Ist bei $T_1 > T_2$ auch $T_{w1} > T_{w2}$, wie es bei Gegenstrom zutrifft, dann dürfte das beschriebene Verfahren sich im allgemeinen als genauer erweisen als bei T_w = const.

STEIGERUNG DER GENAUIGKEIT DES VERFAHRENS

Die Genauigkeit lässt sich steigern, wenn man in Gl. (11) a nicht als konstant, sondern als temperaturabhängig betrachtet. Diese Temperaturabhängigkeit lässt sich nach Gl. (11) berechnen, indem man diese Gleichung nach a auflöst und die aus Gl. (10) ermittelten genauen Werte von T^* einsetzt. Hierbei soll T_w wieder als konstant betrachtet werden. Die auf diese Weise erhaltenen Werte von a sind in Abb. 4 abhängig von T_1/T_w und T_2/T_w dargestellt, wobei T_2/T_w als Abszisse, T_1/T_w als Parameter gewählt ist. Man erkennt, dass in der Tat die konstanten Werte $a = \frac{1}{3}$ oder $a = 0{,}36$ nur eine grobe Näherung darstellen.

Recht genau lässt sich a wiedergeben durch die empirische Gleichung

$$a = 0{,}65 \cdot \frac{\sqrt[4]{[(T_2/T_w) - 1]}}{\sqrt{[(T_1/T_w) - 1]}}. \qquad (14)$$

Mit dem nach dieser Gleichung erhaltenen Wert

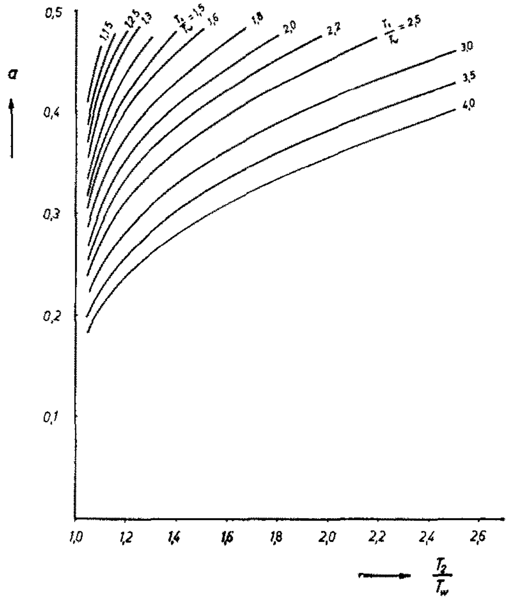

ABB. 4. Genaue Werte von a in Gleichung (11) abhängig von T_1/T_w und T_2/T_w.

von a lässt sich die Berechnung der Wärmestrahlung bei konstantem Strahlungsaustauschverhältnis ϵ_{gw} und konstanter Wandtemperatur T_w im gesamten in Abb. 1, 2 und 3 dargestellten Bereich auf etwa 1 Prozent genau durchführen.

VERFAHREN MIT GENAUER BERECHNUNG DER WÄRMESTRAHLUNG AN ZWEI STELLEN

Die vorangehenden Erörterungen über die Genauigkeit des geschilderten Verfahrens, bei dem die Wärmestrahlung nur bei einer Temperatur $T = T^*$ berechnet wird, treffen nur zu, wenn das Strahlungsaustauschverhältnis ϵ_{gw} hinreichend konstant ist. Eine stärkere Temperaturabhängigkeit von ϵ_{gw} kann zusätzliche Fehler verursachen. Es wird sich dann empfehlen, die Wärmestrahlung wenigstens an zwei Stellen des Wärmeaustauschers genau zu berechnen. Aber auch bei ϵ_{gw} = const ist mit einer solchen Berechnung eine grössere Genauigkeit zu erwarten als bei Anwendung des einfachsten Verfahrens mit einem konstanten Wert von a in Gl. (11).

Eine Berechnung der Wärmestrahlung aus den an zwei Stellen ermittelten Werten lässt sich wie folgt durchführen.

Ist α eine mit der Temperatur veränderliche Wärmeübergangszahl, dann gilt nach den bekannten Beziehungen für die Wärmeübertragung

$$\mathrm{d}Q = \alpha \Delta T \,\mathrm{d}F = -\, G c_p \,\mathrm{d}T, \tag{15}$$

worin $T - T_w = \Delta T$ gesetzt ist und auch T_w als temperaturabhängig betrachtet werden kann. Aus Gl. (15) folgt

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\alpha \Delta T} = \frac{\mathrm{d}F}{G c_p}$$

und durch Integration bei konstanter spezifischer Wärme c_p

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{\alpha \Delta T} = \frac{F}{G c_p} = \frac{T_1 - T_2}{(\alpha \Delta T)_m}, \tag{16}$$

wobei im letzten Ausdruck $(\alpha \Delta T)_m$ den gesuchten Mittelwert von $\alpha \Delta T$ darstellen soll. Um diesen Wert zu finden, muss man das in Gl. (16) links stehende Integral nach einem Näherungsverfahren auswerten. Hierzu bietet sich die Gauss'sche Quadratur [2] an, die bei an nur wenigen Stellen bekannten Werten einer Funktion das Integral über diese Funktion recht genau zu berechnen gestattet. Gauss hat hierfür die günstigsten Stellen festgelegt.

Benutzt man nur zwei solche Stellen, dann sind sie nach Gauss für eine Funktion $y = f(x)$ im Integrationsbereich von x_1 bis x_2 festgelegt durch

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= x_1 + 0{,}211(x_2 - x_1) \\ &\text{und} \\ x_2^* &= x_2 - 0{,}211(x_2 - x_1). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese Stellen sind so gewählt, dass sich für jede Kurve 2. Grades, die an diesen Stellen die Ordinaten y_1^* bzw. y_2^* hat, das Integral in den Grenzen x_1 und x_2 denselben Wert hat. (Vgl. Abb. 5.) Es ist dann

$$\int_{x_1}^{x_2} y \,\mathrm{d}x = \frac{x_2 - x_1}{2} (y_1^* + y_2^*). \tag{18}$$

Nimmt man nun an, dass die Funktion $1/\alpha \Delta T$ zwischen T_1 und T_2 genau genug als Funktion 2. Grades von T betrachtet werden kann, dann kann man dieselbe Überlegung auch auf das Integral in Gl. (16) anwenden. Man berechnet zunächst bei den beiden Temperaturen

$$\left.\begin{aligned} T_1^* &= T_1 - 0{,}211(T_1 - T_2) \\ &\text{und} \\ T_2^* &= T_2 + 0{,}211(T_1 - T_2) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

die Werte von $\alpha \Delta T$, die mit $(\alpha \Delta T)_1^*$ und $(\alpha \Delta T)_2^*$ bezeichnet seien. Entsprechend Gl. (18) erhält man dann mit guter Näherung

$$\frac{2}{(\alpha \Delta T)_m} = \frac{1}{(\alpha \Delta T)^*} + \frac{1}{(\alpha \Delta T)_2^*}. \tag{20}$$

Man könnte diese Gleichung statt auf α auch auf die Wärmedurchgangszahl k anwenden,

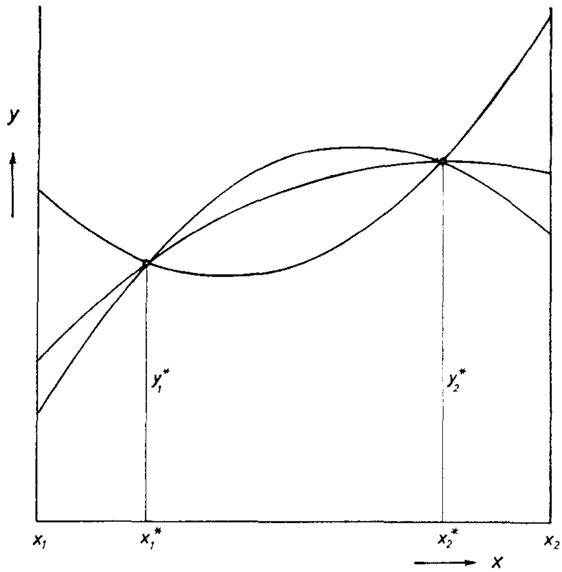

ABB. 5. Flächengleiche Parabeln durch die Punkte x_1^*, y_1^* und x_2^*, y_2^*.

wobei dann ΔT nicht die Temperatur zwischen dem Gas und der Wand, sondern zwischen dem Gas und dem auf der anderen Seite der Wand befindlichen Medium bedeuten.

Am zweckmässigsten ist es aber, aus Gl. (20) den Mittelwert der Wärmeübergangszahl α_s bei reiner Strahlung zu ermitteln. Man berechnet zu diesem Zweck zunächst bei den Temperaturen T_1^* und T_2^* nach Gl. (19) die Werte α_{s1}^* und α_{s2}^* nach der Gleichung

$$\alpha_s = C_s \epsilon_{gw} \frac{T^{*4} - T_w^4}{T^* - T_w} \tag{21}$$

mit $T^* = T_1^*$ oder $T^* = T_2^*$ und erhält dann nach Gl. (20):

$$\frac{2}{\alpha_{sm}\Delta T_m} = \frac{1}{\alpha_{s1}^*\Delta T_1^*} + \frac{1}{\alpha_{s2}^*\Delta T_2^*}, \tag{22}$$

worin für ΔT_m bei konstanten spezifischen Wärmen sinngemäss der logarithmische Mittelwert einzusetzen ist. Damit ist ein verhältnismässig einfaches Verfahren zur Berechnung des Mittelwertes α_{sm} bei reiner Wärmestrahlung gefunden. Der mühsamste Teil der Rechnung dürfte in der Ermittlung von ϵ_{gw} bei den beiden Temperaturen T_1^* und T_2^* bestehen. Auch in diesem Falle muss in Gl. (21) u.U. T^{*4} mit einem anderen Wert von ϵ_{gw} multipliziert werden als T_w^4.

Abb. 6 zeigt die Genauigkeit, die mit diesem Verfahren bei reiner Wärmestrahlung erreicht werden kann, wenn ϵ_{gw} und T_w als konstant vorausgesetzt sind. Wie in Abb. 2 sind die Fehler, d.h. die prozentualen Abweichungen des nach Gl. (19) und (22) errechneten Mittelwertes α_{sm} gegenüber dem genauen Mittelwert nach den Gl. (7) und (9) abhängig von T_1/T_2 aufgetragen. Der durch waagerechte Schraffur gekennzeichnete Streubereich der Fehler lässt erkennen, dass sie erheblich geringer sind als in dem vorausbeschriebenen einfachsten Verfahren mit einem konstanten Wert von a. Die Fehler übersteigen kaum 3 Prozent, wenn T_1/T_2 nicht grösser als 2 ist. Noch etwas kleiner werden die Fehler, wenn man in Gl. (22) den Wert $k = 0{,}211$ durch $k = 0{,}185$ ersetzt. Dies ist dadurch begründet, dass die Funktion $1/(T^{*4} - T_w^4)$ nicht genau durch eine Parabel, sondern noch besser durch eine etwas anders gekrümmte Kurve wiedergegeben wird. Die mit der Konstanten 0,185 sich ergebenden Fehler sind in Abb. 6 durch die senkrechte Schraffur gekennzeichnet.

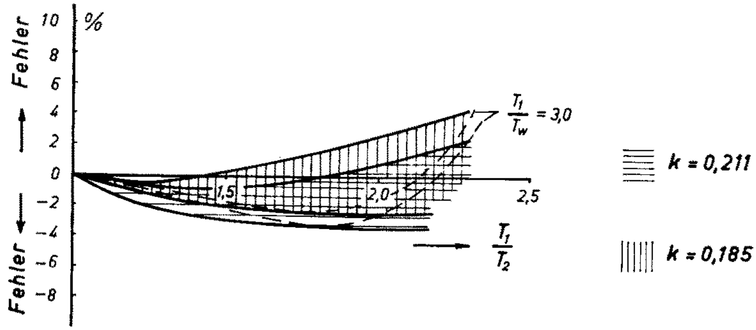

ABB. 6. Genauigkeit des Verfahrens nach Gauss bei reiner Strahlung.

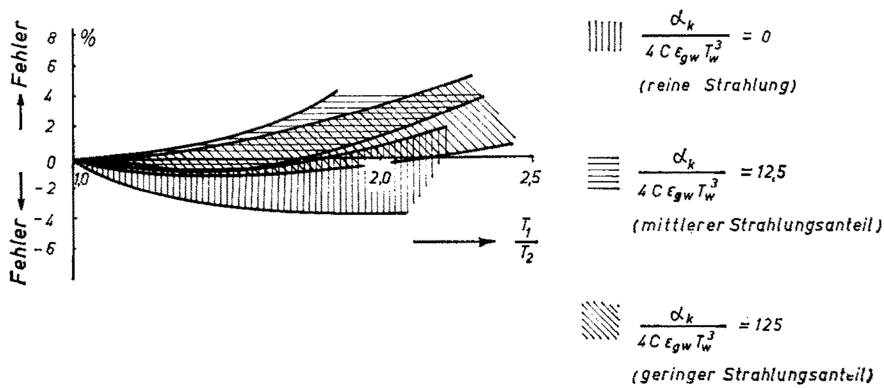

ABB. 7. Fehler des Verfahrens nach Gauss bei Einfluss der Konvektion mit der Konstanten $k = 0{,}211$. ($C = C_s$ = Strahlungszahl des schwarzen Körpers.)

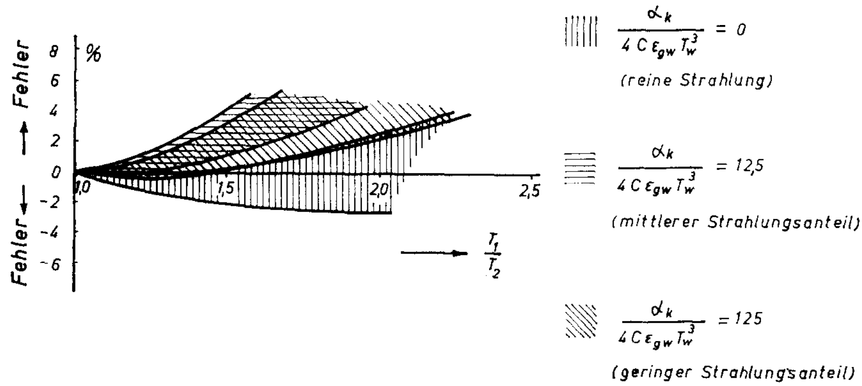

ABB. 8. Fehler des Verfahrens nach Gauss bei Einfluss der Konvektion mit der abgeänderten Konstanten $k = 0{,}185$. ($C = C_s$ = Strahlungszahl des schwarzen Körpers.)

Auch bei diesem Verfahren verringern sich die Fehler der Gesamtwärmeübergangszahl

$$\alpha_g = \alpha_k + \alpha_{sm}$$

durch das Hinzutreten der Wärmeübergangszahl α_k durch Berührung, wie aus den Abb. 7 und 8 hervorgeht. In Abb. 7 ist wie in Gl. (19) die Konstante gleich 0,211, in Abb. 8 gleich 0,185 gesetzt. Man sieht, dass bei Berücksichtigung der Konvektion die Konstante 0,185 nicht günstiger als der Wert 0,211 ist. Am einfachsten ist es, allgemein den Wert 0,20 zu wählen. Noch etwas geringer werden die Fehler, wenn man die Wärmedurchgangszahl k betrachtet. Hervorgehoben sei, dass es sich hierbei nur um die Fehler handelt, die auf der Ungenauigkeit in der Berechnung der Wärmestrahlung beruhen. Die üblichen Ungenauigkeiten in der Bestimmung von ϵ_{gw}, von α_k und der auf der anderen Seite der Wand herrschenden Wärmeübergangszahl sind hierbei nicht berücksichtigt. Die zuletzt genannten unvermeidlichen Ungenauigkeiten sind aber ein Grund, weshalb es wenig sinnvoll wäre, die Genauigkeit der Strahlungsrechnung allein zu weit zu treiben. Das zuletzt beschriebene Verfahren dürfte somit nahezu in allen praktischen Fällen hinreichend genau sein.

VERFAHREN MIT GENAUER BERECHNUNG DER WÄRMESTRAHLUNG AN DREI STELLEN

Man könnte daran denken, die Genauigkeit noch weiter zu steigern, indem man die Berechnung der Strahlung an drei Stellen genau durchführt. Auch in diesem Falle erhielte man die höchste Genauigkeit mit der für drei Stellen geltenden Gauss'schen Quadratur. Aus praktischen Gründen wird es aber vielfach als zweckmässig erscheinen, für die genaue Berechnung die Anfangs- und Endtemperaturen T_1 und T_2 des Gases sowie einen Mittelwert T^*, z.B. $T^* = (T_1 + T_2)/2$ zu wählen, Dies ist vielleicht schon deshalb erwünscht, weil man den grössten und kleinsten Wert von α_s wissen möchte, wie er bei T_1 bzw. T_2 auftritt. Vor allem aber kann man bei mehreren hintereinandergeschalteten Wärmeaustauschern wie etwa bei den Heizflächen von Dampfkesseln, je einen der für eine bestimmte Heizfläche bei T_1 und T_2 genau berechneten Werte u.U. auch für die vorhergehende und nachfolgende Heizfläche mit verwenden.

Ein in diesem Sinne geeignetes Verfahren hat schon früher Hausen [3] beschrieben. Dieses Verfahren ist so allgemein, dass es bei beliebiger Temperaturabhängigkeit der Wärmedurchgangszahl k und der spezifischen Wärmen einen Mittelwert $(k\Delta T)_m$ für die gesamte Wärmeübertragung zu ermitteln gestattet. Es lässt sich sinngemäss auch auf die Wärmestrahlung allein anwenden, wobei man einen guten Mittelwert von α_s erhält. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist indessen nicht grösser als die, welche man bei genauer Berechnung an nur zwei Stellen nach dem im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren erreichen kann.

LITERATUR

1. A. BINDER, Beitrag zur wärmetechnischen Berechnung der Strahlungsheizflächen von Schiffskesseln. *Schiffstechnik*, **7** Nr. 39, 211–218 (1960); etwas gekürzte Fassung des 2. Teiles einer an der Technischen Hochschule Hannover eingereichten Dissertation.
2. Vgl. z.B. *Hütte*, **1**, 28 Aufl. S. 221 (1955).
3. H. HAUSEN, *Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom*, S. 140–145. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg und Bergmann-Verlag, München (1950).

Abstract—Binder has calculated exactly the heat transfer by radiation from a gas to the walls of heat exchangers, but for simplification approximative methods are described in the following article, which use exact values of radiation only at certain temperatures and give a good mean value of radiation for the whole exchanger. In many cases it is sufficient to know the exact value of radiation only at one temperature of the gas, that temperature being higher than the exit temperature by about one third of the difference between entrance and exit temperature. In all practical cases the approximation is satisfactory, if one determines the exact values of radiation at two temperatures, the dependence on temperature of the coefficients of emissivity and absorptivity can also be taken into account.

Résumé—A la suite des calculs exacts de Binder qui déterminent le rayonnement thermique d'un gaz sur les parois des échangeurs de chaleur, cet article présente des méthodes approchées plus simples qui n'utilisent les valeurs exactes du rayonnement qu'à certaines températures et donnent une bonne valeur moyenne du rayonnement pour l'échangeur dans son ensemble. Dans beaucoup de cas, il suffit de connaître la valeur exacte du rayonnement pour une seule température du gaz; cette température étant égale à la température de sortie plus un tiers environ de la différence entre les températures d'entrée et de sortie. Dans tous les cas pratiques l'approximation est satisfaisante si l'on détermine les valeurs exactes du rayonnement pour deux températures, on a tenu compte également de l'influence sur la température des coefficients d'émission et d'absorption.

Аннотация—После того как Биндер, исходя из определенных предпосылок, точно вычислил тепловое излучение применительно к теплообменникам были разработаны приближенные методы расчёта. В этих методах тепловое излучение точно рассчитывается только в отдельных точках, они дают хорошие результаты для средних значений коэффициента теплообмена излучением. Во многих случаях достаточно рассчитать точное значение излучения только в одной единственной точке, для которой температура газа примерно на 1/3 больше температуры на выходе. Практически достаточная точность достигается при точном расчёте в двух точках, причём учитывается также температурная зависимость коэффициентов поглощения и излучения.